

定期試験

形式言語とオートマトン

2016 年 1 月 14 日

問題 1 (部分点は基本的になし)

N を 0 を含まない自然数の集合とする．このとき，アルファベット $\Sigma = \{0, 1\}$ 上の言語

$$L_1 = \{01, 0011, 000111, \dots\} = \{0^i 1^i \mid i \in N\}$$

は，いかなる有限状態オートマトンによっても受理されないことを証明せよ．

問題 2 (部分点は基本的になし)

N を 0 を含まない自然数の集合とする．このとき，アルファベット $\Sigma = \{a, b\}$ 上の言語

$$L_{2b} = \{abb, aabbbb, aaabbbbb, \dots\} = \{a^i b^{2i} \mid i \in N\}$$

を生成する形式文法を与えよ．

問題 3 (部分点は基本的になし)

N を 0 を含まない自然数の集合とし，アルファベット $\Sigma = \{0, 1\}$ 上の言語を考える．形式言語とオートマトン関係の書物を紐解くと，0 と 1 の個数が同数である記号列の集合，例えば

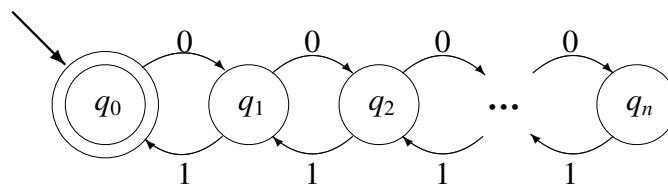
$$L_1 = \{01, 0011, 000111, \dots\} = \{0^i 1^i \mid i \in N\}$$

は，いかなる有限状態オートマトンによっても受理されないとの記載がある．

その事実を信じることができない花子さんは，

$$L_0 = \{\varepsilon, 01, 0011, 000111, \dots\} = \{0^i 1^i \mid i \in \{0\} \cup N\}$$

を受理する有限状態オートマトンを構成しようと思い，以下のような状態遷移図を持つ状態機械を考えた．ただし， ε は空語である．



まず，初期状態が受理状態なので，空語 ε をこの状態機械は受理する．記号列 01 も，初期状態 q_0 から始めて 0 を読んで状態 q_1 になり，その状態で 1 を読んで q_0 に戻り終了するのでやはり受理する．また，記号列 0011 も，初期状態 q_0 から始めて 0 を読んで状態 q_1 になり，その状態で 0 を読んで q_2 になり，次に最初の 1 を読んで状態 q_1 に戻り，さらに最後の 1 を読んで q_0 で終了するのでこれも受理する．同様に，任意の自然数 n に対する記号列 $0^n 1^n$ も，それを読み終えた時，状態 q_0 に戻っているので，受理する．しかも， $0^n 1^n$ の形以外の記号列は状態遷移図から受理しないことがわかる．花子さんはついに L_0 を受理する有限状態オートマトンを構築できたと思った．

この考察に感激した花子さんは， L_1 を受理する有限状態オートマトンは存在しないのに対して， L_0 を受理するものが存在する理由は空語 ε にあると考え，言語 L が空語 ε を含んでいれば，それだけを除いた言語 $L - \{\varepsilon\}$ を受理する有限状態オートマトンは存在しなくても， L を受理する有限状態オートマトンが存在することがあるのだ，という結論を導いた．

花子さんの上記考察は正しいか否か．その理由とともに答えよ．

問題 4 (部分点は基本的になし)

アルファベット $\Sigma = \{0, 1\}$ 上の言語を考える．以下の言語を受理する決定性有限状態オートマトンを状態遷移図で示せ．

1. 二つの 1 で始まり，ちょうど 2 個の 0 を含む (1 は，最初の二つ以外何個あってもよい) 記号列をすべて含み，それ以外の記号列を含まない言語.
2. 少なくとも三つの 1 を含む記号列をすべて含み，それ以外の記号列を含まない言語.

問題 5 (部分点は基本的になし)

N を 0 を含まない自然数の集合とし，アルファベット $\Sigma = \{a\}$ 上の言語 L_a を $L_a = \{aa, aaa, aaaa, \dots\} = \Sigma^* - \{\varepsilon, a\}$, すなわち， a が 2 個以上のすべての記号列の集合とする．ただし， ε は空語である．以下では， L_a の語を入力とするチューリングマシンを考える．

1. L_a のすべての語 $w \in L_a$ に対して，停止しないチューリングマシンを構成し，そのチューリングマシンが停止しない理由を簡潔に説明せよ．
2. 太郎君は，すべての語 $w \in L_a$ に対し，停止しないチューリングマシン M を構成できた．さらに太郎君は以下のように考えた．「1 を Yes, 0 を No に対応づければ，与えられたいかなる入力記号列 $w \in L_a$ に対しても，0 をテープ上に書いて停止するチューリングマシン M_U は簡単に作ることができ，そのチューリングマシン M_U は，どんな入力記号列 $w \in L_a$ に対しても常に No を出して停止する．よって M_U は，先のチューリングマシン M の停止性を正しく判断する．」この考えに興奮した太郎君は，チューリングマシンの停止問題が決定不能であるという大定理の間違いを発見したと主張している．太郎君の主張は正しいか，あるいは誤っているか．誤っている場合には，太郎君の考えのどこが誤っているかを指摘せよ．