レポート問題

[redacted]

[redacted]

補集合

S={x| x ∈ **Z**,　2 ≦x≦20} とします

- T={3x | x ∈**Z**}　のとき、$S \setminus T$ を記述しなさい
- U=**Z**, P=素数全体の集合とします。　$(U \setminus P)$ ∩ S　を要素を列挙する形で記述しなさい。

ただし、**Z**は整数全体の集合です。

解答用紙　（以下、解答用紙はコピーして増やしてもよい）

- S/T={x |a∈ **Z** ,2≦x≦20,x≠3a}
- $(U \setminus P)$ ∩ S={4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20}

全射と単射

- 次の写像は、全射ですか、単射ですか、どれでもないですか？
  - **R** x **R**　から**R**　への写像　$f(x,y) = 4x+2y$
  - **R**　から　**R**への写像　$g(x) = x^2 + 2x$
  - **R**　から　**R**への写像　$h(x) = x+3$
  - **N**　から　**N**への写像　$h(x) = x+3$

注意：**R**は実数全体の集合、**N**は自然数全体の集合です

解答用紙

- **R** x **R**　から**R**　への写像　$f(x,y) = 4x+2y$
全射であるが、単射ではない
- **R**　から　**R**への写像　$g(x) = x^2 + 2x$
全射、単射でもない
- **R**　から　**R**への写像　$h(x) = x+3$
全射であり、単射である
- **N**　から　**N**への写像　$h(x) = x+3$
単射であるが、全射ではない

鳩の巣原理

一辺20の正方形の中に401個の点が配置されています
距離が1.5以下の2点が必ずあることを示しなさい

解答用紙

- 401個の点を要素とする集合をS={1,2,3,⋯,399,400,401}とする。

次に、1辺20の正方形に関して、それを1×1の正方形に分ける。

20×20=400、この400個の点を要素とする集合をT={1,2,3,⋯,398,399,400}とする。

SからTへの写像をfとすると、fにおいて|S|>|T|より、fは単射ではない。よってどれかの正方形には点が2つあることがわかる。1つの正方形に2つ点がある場合、2点間の距離の最大値は1×1の正方形の対角線であり、その値は$\sqrt{2}<1.5$。

これらより、1辺20の正方形の中に401個の点が配置されているとき、距離が1.5以下の2点が必ずある。

論理とその逆、対偶

- 以下の命題それぞれに対して、逆命題及び対偶命題を述べ、それら逆命題、対偶命題が正しい命題かどうかを述べ、正しくなければ反例を記述せよ
- 　20以上200以下の自然数ｘを考える。この時「ｘが素数である」ならば　「ｘは2以上13以下のどの自然数でも割れない」
- 　20以上400以下の自然数ｘを考える。この時「ｘが素数である」ならば　「ｘは2以上13以下のどの自然数でも割れない」

解答用紙

- 20以上200以下の自然数ｘを考える。この時「ｘが素数である」ならば　「ｘは2以上13以下のどの自然数でも割れない」

逆命題「xが2以上13以下のどの自然数でも割れない」ならば「xは素数である」:真

証明 xが2以上13以下のどの自然数でも割れないとする。この時、xが合成数であると仮定しx=st(s:13よりも大きい素数,t:13よりも大きい自然数)とする。xは13より大きい素数でしか割れない。また、割ったときの商は14以上の整数である。ここで、13より大きい素数はすなわち17以上の素数となる。

st≧17×14=238>200となり、これはxが20以上200以下の自然数であるという条件に矛盾する。よって、xは合成数ではない。素数であるといえる。

解答用紙

対偶命題　「xが2以上13以下のある自然数で割り切れる」ならば「xは素数ではない」:真

xが素数ということは1とx以外に約数を持たない。2以上13以下のある自然数でも割れることは1とx以外に約数を持つということであり、xは素数でないので、この対偶は正しい。

解答用紙

20以上400以下の自然数ｘを考える。この時「ｘが素数である」ならば　「ｘは2以上13以下のどの自然数でも割れない」

逆命題　「xが2以上13以下のどの自然数でも割れない」ならば「xは素数である」

偽　反例289

20以上400以下の自然数ｘを考える。この時「ｘが素数である」ならば　「ｘは2以上13以下のどの自然数でも割れない」

対偶命題　「xが2以上13以下のある自然数で割り切れる」ならば「xは素数ではない」

xが素数であることは1とx以外に約数を持たないことである。2以上13以下のある自然数でも割り切れるということは1とx以外に約数を持つことであり、xは素数でないので、この対偶は正しい。

背理法

- $X^2 = 2$　は有理数の根を持たないことを背理法を用いてしめせ。
- 注意：平方根や平方根記号を回答で用いてはいけない。

解答用紙

$X^2=2$が有理数の根を持つと仮定する。$X=a/b$($b\neq 0$,aとbは互いに素な整数)と表せる。$a^2/b^2=2$より$a^2=2b^2$

右辺は2の倍数だから左辺も2の倍数となる。すなわち偶数である。よって$a=2k$($k\in Z$)とおける。したがって$4k^2=2b^2$,$2k^2=b^2$
これから、bも偶数であることがわかる。これは、aとbが互いに素であることに矛盾する。$X^2=2$が有理数の根を持たないといえる。

数学的帰納法

自然数を定義域に持つ写像　F(x）が

F(1)=F(2)= F(3)＝1 であり、

F(k) ≦　F(k-1) + F(k-2) +2F(k-3)　を4以上の任意のｋで満たすとする。

このとき、任意の自然数ｎに対してF(n)　≦　2^{n-1}　であることを数学的帰納法を用いて示せ。

数学的帰納法の使い方を問う問題なので、異なった証明法で示した場合は0点になるので注意

解答用紙

任意の自然数nに対してF(n) ≦ 2^{n-1}であることを示したい。この命題をP(n)とする。F(1)=F(2)=F(3)=1

(1)n≦4の自然数の場合

P(1)=F(1)=1≦1,P(2)=1≦2,P(3)=F(3)=1≦4,P(4)=F(4)≦F(3)+F(2)+2F(1)=4≦8となり、P(n)はnが4以下の自然数の時成り立つといえる。

(2)n>4の自然数の時、P(k)がk≦n-1の時の時に成り立つと仮定すると、k≦n-1,k≦n-2,k≦n-3でも成り立つ。F(n-1)≦ 2^{n-2},F(n-2)≦ 2^{n-3},F(n-3)≦ 2^{n-4}となる。

F(n)≦F(n-1)+F(n-2)+F(n-3)≦ $2^{n-2}+ 2^{n-3}+ 2^{n-4}= 2^{n-1}$これらより任意の自然数nに対してP(n)が成り立つといえる。

述語論理

- 次のそれぞれの命題は正しい命題でしょうか．説明をつけて示しなさい

  - $\exists c \in \mathbf{N}, \forall m \in \mathbf{N}, \quad cm^2 > 10m$
  - $\exists m \in \mathbf{N}, \forall c \in \mathbf{N}, \quad cm^2 > 10m$
  - $\forall m \in \mathbf{N}, \exists c \in \mathbf{N}, \quad cm^2 < 10m$

注意：**N**は自然数全体の集合です(0は含まないことに注意)

解答用紙

- $\exists c \in \mathbf{N}, \forall m \in \mathbf{N}, \quad cm^2 > 10m$

c=10とする。$10m^2>10m, m^2>m, m^2-m>0, m(m-1)>0$

mは0でない。よって$m-1>0, m>1$となる。

mは任意の自然数であるから、これはmの条件を満たしている。
よってこの命題は真である。

- $\exists m \in \mathbf{N}, \forall c \in \mathbf{N}, \quad cm^2 > 10m$

m=100とすると、$10000c>1000, c>1/10$

cは任意の自然数であるから、これはcの条件を満たしている。
よってこの命題は真である。

解答用紙

- $\forall m \in \mathbf{N}, \exists c \in \mathbf{N}, \quad cm^2 < 10m$

命題の否定を考える。「$\forall c \in \mathbf{N}, \exists m \in \mathbf{N}, cm^2 \geqq 10m$」

$m=100$とすると、$10000c \geqq 1000$, $c \geqq 1/10$

これは任意の自然数cに対して成立する。

よって命題の否定は正しい。

よって元の命題は正しくない。