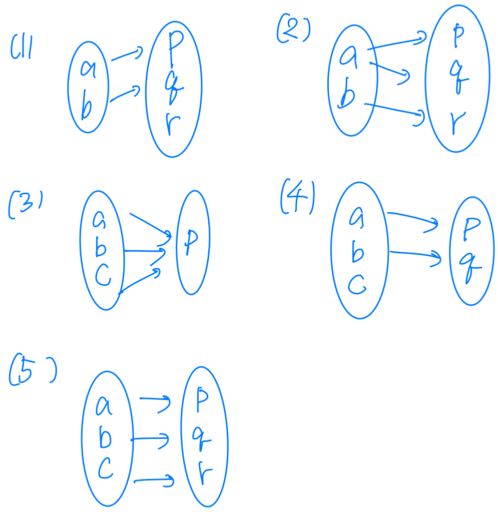
数理論理学 2018 年度春学期第 1 回中間試験（持ち帰り可）（1/4）

【記述式】と書かれた設問（11,12,13,21）は所定の解答に記述し、それ以外はマークで解答せよ。
いくつかの横念や規則については未尾に【参考】として記述しているので、それを参考にしてよい。

1. 集合 X から集合 Y への対応 f を以下のように定義する。ただし、$x \mapsto y$ は X の要素 x に Y の要素 y を対応させることを表し、記述されているもの以外の対応関係はないとする。（1）～（5）において f が関数になっているものをすべて挙げよ。

(1) $X=\{a,b\}$, $Y=\{p,q,r\}$, $f: a \mapsto p, b \mapsto q$
(2) $X=\{a,b\}$, $Y=\{p,q,r\}$, $f: a \mapsto p, a \mapsto q, b \mapsto r$
(3) $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{p\}$, $f: a \mapsto p, b \mapsto p, c \mapsto p$
(4) $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{p,q\}$, $f: a \mapsto p, b \mapsto q$
(5) $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{p,q,r\}$, $f: a \mapsto p, b \mapsto q, c \mapsto r$



1, 3, 5

2.設問 1 の（1）～（5）において f が全射であるものをすべて挙げよ、

3, 5

3.設問 1 の（1）～（5）において f が単射であるものをすべて挙げよ、

1. 5

4.自然数の集合 N 上の二項関係≤を、a,b∈N に対して b が a よりも大きいまたは等しいときに a≤b と定義する。以下の言明で正しいものをすべて挙げよ、

(1) ≤は反射的である　$a \leq a$

(2) ≤は対称的である　$a \leq b$ のとき　$b \leq a$

(3) ≤は推移的である　$a \leq b$ かつ　$b \leq c \Rightarrow a \leq c$

(4) ≤は N 上の半順序である　反対称?　$a \leq b$ かつ $b \leq a$ のとき $a=b$ ○

(5) ≤は N 上の全順序である　$a \leq b$ か $b \leq a$ なりたつ

5.集合 S のベキ集合 2^s 上の（二項）関係⊆を、A,B∈2^s に対して A が B の部分集合（等しいときを含む）であるときに A⊆B と定義する。以下の言明で正しいものをすべて挙げよ、

(1)⊆は反射的である　$A \subseteq A$

(2)⊆は対称的である　$A \subseteq B$ のとき $B \subseteq A$?

(3)⊆は推移的である　$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ のとき　$A \subseteq C$

(4)⊆は 2^s 上の半順序である　反対称?　$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ のとき $A=B$　○

(5)⊆は 2^s 上の全順序である　$A \subseteq B$ または $B \subseteq A$ どちらか成り立つ　×
例　$A=\{1\}$, $B=\{2\}$

6.P,O,R を命題記号とする。解釈 I を I(P)=⊥, I(Q)=⊥, I(R)=⊥とするとき、[[P∧Q⊃R]]I の値は以下のいずれか、

(1) T
(2) ⊥
(3) 不定

$[[P]]_I \land [[Q]]_I \supset [[R]]_I$

$\bot \land \bot \supset \bot$

$\rightarrow \top$

7.A,B を命題論理の論理式とする。[[A∨B]]I＝⊥のとき、[[B]]I の値は以下のいずれか、

(1) T
(2) ⊥
(3) 不定

A	B	A∨B
T	T	T
T	⊥	T
⊥	T	T
⊥	⊥	⊥

8.A.B を命題論理の論理式とする、[[A⊃B]]I＝⊥のとき、[[B]]I の値は以下のいずれか。

A	B	A⊃B
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	T
⊥	⊥	T

(1) T
(2) ⊥
(3) 不定

数理論理学 2018 年度春学期第 1 回中間試験（持ち帰り可］(2/4)
9. A,B,C を命題理の論理式とする。以下の言明で正しいものをすべて挙げよ。
(1) A がトートロジ（恒真）ならば[[A]]I＝T である解釈 I が存在する。
(2) A がトートロジでないならば A は充足不能である、
(3) A が充足不能ならば A はトートロジではない。
(4) [[A]]I=⊥である解釈 I が存在すれば、A は充足不能である.
(5) A が充足可能ならば¬A は充足不能である。
(6) ¬（AVB）と（¬A）∧（¬B）は論理的同値である。
(7) AVB が充足不能ならば（CVA）∧（¬CVB）は充足不能である。

10.
P,Q,R を命題配号とする、以下の論理式の中で節の形式でかれているものをすべて挙げよ
× CNF
(1) P
(2) ¬P
(3) P∧Q
(4) P∨Q
(5) P⊃¬Q
(6) (P∧Q) ∨R
(7) P∨Q∨¬R

11.【記述式]P,Q,R を命額記号とする。論理式$\neg(P\wedge(Q\vee R))$を連言標準形に変換せよ、答えのみ記せ。

$\neg((P\wedge Q)\vee(P\wedge R))$

$\neg(P\wedge Q)\wedge\neg(P\wedge R)$

$(\neg P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee\neg R)$

12.[記述式]P,Q,R,S を命題記号とする、論理式$\neg P\vee Q\supset R\wedge S$を連標準形に変換せよ。答えのみ記せ。

$\neg(\neg P\vee Q)\vee(R\wedge S)$

$(P\wedge\neg Q)\vee(R\wedge S)$

$(P\vee(R\wedge S))\wedge(\neg Q\vee(R\wedge S))$

$(P\vee R)\wedge(P\vee S)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge(\neg Q\vee S)$

13.[記述式]P,Q,R を命題記号とする。以下の命題論理の節の集合に導出原理を適用し、この集合が充足不能であることを示せ。

$\{\neg P\vee\neg Q\vee R,\ P\vee R,\ Q\vee R,\ \neg R\}$

$\neg Q\vee R$

R

$\perp$

よってこの式は充足不能である.

14. P,Q を命題記号とする。以下のシーケントの中で初期シーケントであるものをすべて挙げよ。ただし、初期シーケントの定義は未尾の【参考]に記述されているものとする。

(1) $P\rightarrow P$

(2) $\neg P\rightarrow\neg P$

(3) $Q,P\rightarrow P$

(4) $\rightarrow P$

(5) $\neg Q,P\rightarrow P$

(6) $P\wedge Q\rightarrow P\wedge Q$

(7) $P,P\wedge Q\rightarrow P$

(15) P,Q,R を命題記号とする。以下はあるシーケントに LK の推論規則を 1 回適用したものである。適用した推論規則を示せ、規則が正しく適用できていない場合は、「正しい適用ではない」と答えよ、（1）～（10）の記号で解答せよ、

(1) exchange
(2) ¬左
(3) ¬右
(4) ∧左
(5) ∧右
(6) ∨左
(7) ∨右
(8) ⊃左
(9) ⊃右
(10) 正しい適用ではない

P,Q→PVQ
——————— ∧左 (4)
P∧Q→PVQ

16.設問 15 において以下の LK の推論で適用した推論規則を上記（1）～（10）で示せ、

P,Q → P P,Q →Q
——————————— ∧右 (5)
P,Q→ P∧Q

数理論理学 2018 年度春学期第 1 回中間試験 [持ち帰り可]（3/4）

17.設問 15 において以下の LK の推論で適用した推論規則を上記（1）～（10）で示せ、

Q → ¬P,P

——————— ¬左 (2)

¬P,Q → ¬P

18.設問 15 において以下の LK の推論で適用した推論規則を上記（1）～（10）で示せ

¬P,P,Q → P∨Q

—————————— exchange (1)

P,-P, Q → P∨Q

19.設問 15 において以下の LK の推論で適用した推論規則を上記（1）～（10）で示せ、

P → Q,R

———————- × (10)

→ P ⊃ Q,R

20.設問 15 において以下の LK の推論で適用した推論規則を上記（1）～（10）で示せ、

P∧Q → Q∧P

———————- X (10)

P∧Q → P∧R

21.[記述式]P,Q を命題記号とする。Wang のアルゴリズムを使って以下のシーケントがトートロジであることを証明せよ、→ (P∧(P⊃Q))⊃Q

P → Q, P　　Q, P → Q

———————————————— ⊃左

P⊃Q, P → Q

———————————————— exchange

P, P⊃Q → Q

———————————————— ∧左

P∧(P⊃Q) → Q

———————————————— ⊃右

→ (P∧(P⊃Q))⊃Q

2週目

数理論理学 2018 年度春学期第 1 回中間試験（持ち帰り可）（1/4）

【記述式］と書かれた設問（11,12,13,21）は所定の解答に記述し、それ以外はマークで解答せよ。
いくつかの横念や規則については未尾に【参考］として記述しているので、それを参考にしてよい。

1. 集合 X から集合 Y への対応 f を以下のように定義する。ただし、x |→ y は X の要素 x に Y の要素 y を対応させることを表し、記述されているもの以外の対応関係はないとする。（1）～（5）において f が関数になっているものをすべて挙げよ。

(1) X={a,b}, Y={p,q,r}, f: a |→ p, b |→ q
(2) X={a,b}, Y={p,q,r}, f: a |→ p, a |→ q, b |→ r
(3) X={a,b,c}, Y={p}, f: a |→ p, b |→ p, c |→ p
(4) X={a,b,c}, Y={p,q}, f: a |→ p, b |→ q
(5) X={a,b,c}, Y={p,q,r}, f: a |→ p, b |→ q, c |→ r

2.設問 1 の（1）～（5）において f が全射であるものをすべて挙げよ、

3.設問 1 の（1）～（5）において f が単射であるものをすべて挙げよ、

4.自然数の集合 N 上の二項関係≤を、a,b∈N に対して b が a よりも大きいまたは等しいときに a≤b と定義する。以下の言明で正しいものをすべて挙げよ、

(1) ≤は反射的である

(2) ≤は対称的である

(3) ≤は推移的である

(4) ≤は N 上の半順序である

(5) ≤は N 上の全順序である

5.集合 S のベキ集合 2^s 上の(二項)関係⊆を、A,B∈2^s に対して A が B の部分集合(等しいときを含む)であるときに A⊆B と定義する。以下の言明で正しいものをすべて挙げよ、

(1)⊆は反射的である

(2)⊆は対称的である

(3)⊆は推移的である

(4)⊆は 2^s 上の半順序である

(5)⊆は 2^s 上の全順序である

6.P,O,R を命題記号とする。解釈 I を I(P)=⊥, I(Q)=⊥, I(R)=⊥とするとき、[[P∧Q⊃R]]I の値は以下のいずれか、

(1) T

(2) ⊥

(3) 不定

7.A,B を命題論理の論理式とする。[[A∨B]]I=⊥のとき、[[B]]I の値は以下のいずれか、

(1) T

(2) ⊥

(3) 不定

8.A.B を命題論理の論理式とする、[[A⊃B]]I＝⊥のとき、[[B]]I の値は以下のいずれか。

(1) T

(2) ⊥

(3) 不定

数理論理学 2018 年度春学期第 1 回中間試験（持ち帰り可］（2/4)

9. A,B,C を命題理の論理式とする。以下の言明で正しいものをすべて挙げよ。

（1）A がトートロジ（恒真）ならば[[A]]I＝T である解釈 I が存在する。

（2）A がトートロジでないならば A は充足不能である、

（3） A が充足不能ならば A はトートロジではない。

（4）[[A]]I=⊥である解釈 I が存在すれば、A は充足不能である.

（5）A が充足可能ならば¬A は充足不能である。

（6）¬（AVB）と（¬A）∧（¬B）は論理的同値である。

（7） AVB が充足不能ならば（CVA）∧（¬CVB）は充足不能である。

10.

P,Q,R を命題配号とする、以下の論理式の中で節の形式でかれているものをすべて挙げよ

(1) P

(2) ¬P

(3) P∧Q

(4) P∨Q

(5) P⊃¬Q

(6) (P∧Q) ∨R

(7) P∨Q∨¬R

11.【記述式]P,Q,R を命額記号とする。論理式$\neg(P\land(Q\lor R))$を連言標準形に変換せよ、答えのみ記せ。

12.[記述式]P,Q,R,S を命題記号とする、論理式$\neg P\lor Q\supset R\land S$ を連標準形に変換せよ。答えのみ記せ。

13.[記述式]P,Q,R を命題記号とする。以下の命題論理の節の集合に導出原理を適用し、この集合が充足不能であることを示せ。
$\{\neg P\lor\neg Q\lor R, P\lor R, Q\lor R, \neg R\}$

14. P,Q を命題記号とする。以下のシーケントの中で初期シーケントであるものをすべて挙げよ。ただし、初期シーケントの定義は未尾の【参考]に記述されているものとする。
(1) $P\rightarrow P$
(2) $\neg P\rightarrow \neg P$
(3) $Q,P\rightarrow P$
(4) $\rightarrow P$
(5) $\neg Q,P\rightarrow P$
(6) $P\land Q\rightarrow P\land Q$
(7) $P,P\land Q\rightarrow P$

(15) P,Q,R を命題記号とする。以下はあるシーケントに LK の推論規則を 1 回適用したものである。適用した推論規則を示せ、規則が正しく適用できていない場合は、「正しい適用ではない」と答えよ、（1）～（10）の記号で解答せよ、

(1) exchange
(2) ¬左
(3) ¬右
(4) ∧左
(5) ∧右
(6) ∨左
(7) ∨右
(8) ⊃左
(9) ⊃右
(10) 正しい適用ではない

P,Q→PVQ
———————
P∧Q→PVQ

16.設問 15 において以下の LK の推論で適用した推論規則を上記（1）～（10）で示せ、

P,Q → P P,Q →Q
———————————
P,Q→ P∧Q

数理論理学 2018 年度春学期第 1 回中間試験 [持ち帰り可]（3/4）

17.設問 15 において以下の LK の推論で適用した推論規則を上記（1）～（10）で示せ、

Q → ¬P,P

———————

¬P,Q → ¬P

18.設問 15 において以下の LK の推論で適用した推論規則を上記（1）～（10）で示せ

¬P,P,Q → P∨Q

——————————

P,-P, Q → P∨Q

19.設問 15 において以下の LK の推論で適用した推論規則を上記（1）～（10）で示せ、

P → Q,R

———————-

→ P ⊃ Q,R

20.設問 15 において以下の LK の推論で適用した推論規則を上記（1）～（10）で示せ、

P∧Q → Q∧P

———————-

P∧Q → P∧R

21.[記述式]P,Q を命題記号とする。Wang のアルゴリズムを使って以下のシーケントがトートロジであることを証明せよ、→ (P∧(P⊃Q))⊃Q